EHEC TD ALGÈBRE – Classes Préparatoires

Série n° 4 (Groupes 1; 5 et 12)

EXO11:

Si $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ et $w = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$

Montrons que : a) $|w| = 1$

$$|w| = \frac{|z-1|}{|1-\bar{z}|} = \frac{|x-1+iy|}{|1-x+iy|} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}} = 1.$$

b) $\dfrac{w-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ car $\dfrac{w-1}{z-1} = \dfrac{\frac{z-1}{1-\bar{z}} - 1}{z-1} = \dfrac{z-1-(1-\bar{z})}{(z-1)(1-\bar{z})}$

$$= \frac{2x-2}{(x-1+iy)(1-x+iy)} = \frac{-(2x-2)}{(x-1)^2+y^2} \in \mathbb{R}.$$

c) $\dfrac{w+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ car $\dfrac{w+1}{z-1} = \dfrac{z-1+1-\bar{z}}{(z-1)(1-\bar{z})} = \dfrac{-2iy}{(x-1)^2+y^2} \in i\mathbb{R}.$

EXO12: Posons $u = e^{i\theta}$ et $v = e^{i\alpha}$ avec $\theta \neq \alpha$.

$$z = \frac{u-v}{u+v} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\theta + i\sin\theta + \cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{(\cos\theta - \cos\alpha) + i(\sin\theta - \sin\alpha)}{(\cos\theta + \cos\alpha) + i(\sin\theta + \sin\alpha)}$$

$$= \frac{[(\cos\theta - \cos\alpha) + i(\sin\theta - \sin\alpha)][(\cos\theta + \cos\alpha) - i(\sin\theta + \sin\alpha)]}{(\cos\theta + \cos\alpha)^2 + (\sin\theta + \sin\alpha)^2}$$

$$= \frac{i\sin(\theta - \alpha)}{1 + 2\cos\theta\cos\alpha} \in i\mathbb{R}.$$

Exo 13

Posons $u = e^{i\theta}$; $v = e^{i\alpha}$ et $w = e^{i\gamma}$

*) Calculons $|uv + vw + wu|^2 = \left|e^{i(\alpha+\theta)} + e^{i(\alpha+\gamma)} + e^{i(\theta+\gamma)}\right|^2$

$= \left(\cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\theta+\gamma)\right)^2 + \left(\sin(\alpha+\theta) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\theta+\gamma)\right)^2$

$= 1+1+1+2\big[\cos(\alpha+\theta)\cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha+\theta)\cos(\theta+\gamma) + \cos(\alpha+\gamma)\cos(\theta+\gamma)$

$+ \sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha+\theta)\sin(\theta+\gamma) + \sin(\alpha+\gamma)\sin(\theta+\gamma)\big]$

$= 3 + 2\left(\cos(\theta-\gamma) + \cos(\alpha-\gamma) + \cos(\alpha-\theta)\right)$

*) Calculons $|u+v+w|^2 = (\cos\theta + \cos\alpha + \cos\gamma)^2 + (\sin\theta + \sin\alpha + \sin\gamma)^2$

$= 1+1+1+2(\cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\gamma + \sin\theta\sin\alpha +$
$\sin\theta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)$

$= 3 + 2\left(\cos(\theta-\gamma) + \cos(\alpha-\gamma) + \cos(\alpha-\theta)\right).$

Rappel : $\begin{cases} \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b. \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{cases}$

On a bien $|uv + vw + uw|^2 = |u+v+w|^2$
d'où l'égalité demandée.

Ecole des Hautes Etudes Commerciales - HEC Alger

HEC ALGER

Classes Préparatoires

Année Universitaire 2015/2016

Module : Algèbre — Série n° 5 — Polynômes et Fractions rationnelles

1] Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré inferieur ou egal à 3 ($P \in \mathbb{R}_3[X]$) tq : $P(0)=-2$, $P'(0)=P''(0)=2$ et $\alpha=1$ est une racine de P.

2] Effectuer la division euclidienne de A sur B :

$(A,B) = (X^4-3X^3+X-2,\ 1-X^2)$

$(A,B) = (X^5+2X^4-X^3+6X^2+2,\ X^3+1)$

$(A,B) = (3X^4+2X^3+1,\ X^2+X+1)$.

3] Determiner le reste de la division de A sur B.

$(A,B) = (X^9-3X^6+X^5+1,\ X-1)$

$(A,B) = (X^{2015}-3X^{2016}+19X^{2017}+2X-1,\ X(X+1))$

$(A,B) = (X^{21}+2X^{19}-5X^6+3X-2,\ (X-1)^2)$

4] Montrer que $1+X+X^2$ est un diviseur de $X^{360}+X^{416}+X^{289}$.

5] Déterminer le degré du polynôme :

$P_n = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$, $n \geq 0$.

6] Determiner la multiplicité de la racine $\alpha=1$ pour le polynôme : $X^9-9X^5+9X^4-1$.

7] Effectuer la Division suivant les puissances croissantes à l'ordre proposé.

$(A,B,k) = (X^4-3X^3+2X-1,\ X^2+X+1,\ 2)$

$(A,B,k) = (X^5+2X^4-3X^3+2X+4,\ X^3-1,\ 3)$

8] Montrer que toutes les racines de P sont simples avec, $P = 1+X+\frac{X^2}{2!}+\dots+\frac{X^n}{n!}$.

9]. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$X^3+1,\ X^4+1,\ X^4+X+1,\ X^3+2X^2+2X+1$.

10] Determiner si les elements (fractions) suivantes sont simples :

$\frac{\sqrt{3}}{(X+2)^3},\ \frac{2X}{(X-1)^4},\ \frac{-2}{(3X+1)^3},\ \frac{1}{(X^2+1)^2},\ \frac{2X}{X^2+X+1},\ \frac{3X}{(X^2-3X+\dots}$

11] Décomposer les fractions suivantes en elements simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$

$F_1 = \frac{X^2+1}{(X+1)(X^2-4)}$, $F_2 = \frac{X^3+X^2+X+1}{X-1}$, $F_3 = \frac{2X}{(X-2)(X-3)}$

$F_4 = \frac{1}{X^2(X^2+1)}$

12] Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions :

$G_1 = \frac{X+1}{(X-2)(X^2+1)}$, $G_2 = \frac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$

$G_3 = \frac{1}{X^3+1}$, $G_4 = \frac{1}{X^2(X+1)(X^2+1)}$.

Série n° 5 ALGÈBRE EHEC
Classes Préparatoires 1ère année

Polynômes et Fractions rationnelles.

Exo1 : On a $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$.

On a $P(0) = -2 = (-1)(c) \Rightarrow c = 2$.

$P'(x) = ax^2+bx+c + (x-1)(2ax+b)$

$P'(0) = 2 = 2 + (-1)(b) \Rightarrow b = 0$

$P''(x) = 2(2ax+b) + (x-1)(2a)$

$P''(0) = 2 = -2a \Rightarrow a = -1$

donc $P(x) = (x-1)(-x^2+2) = -x^3+x^2+2x-2$.

Exo2 : Division euclidienne de A par B.

a) $A = x^4 - 3x^3 + x - 2$ | $B = -x^2+1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - 3x^3 + x - 2 & -x^2+1 \\
- & x^4 - x^2 & \overline{-x^2+3x-1} = Q \\
\hline
 & -3x^3 + x^2 + x - 2 & \\
- & -3x^3 + 3x & \\
\hline
 & x^2 - 2x - 2 & \\
- & x^2 - 1 & \\
\hline
 & -2x - 1 = R. &
\end{array}
$$

Donc $x^4 - 3x^3 + x - 2 = (-x^2+1)(-x^2+3x-1) + (-2x-1)$

$A = B.Q + R$.

b)

$$\begin{array}{l|l} x^5+2x^4-x^3+6x^2+2 & x^3+1 \\ \underline{-\ x^5+\qquad\qquad x^2} & \overline{x^2+2x-1} \\ \quad 2x^4-x^3+5x^2+2 & \\ \underline{-\ 2x^4\qquad +2x} & \\ \quad -x^3+5x^2-2x+2 & \\ \underline{-\ (-x^3-1)} & \\ \quad 5x^2-2x+3 & \end{array}$$

Exo3 : Cherchons le reste de A par B si

a) $A = x^9 - 3x^6 + x^5 + 1$ et $B = x-1$

Calculons $A(1) = 1-3+1+1 = 0$ donc 1 est racine de A.

Par conséquent le reste de A par B est 0.

(On a $A = (x-1)(x^8+x^7+x^6-2x^5-x^4-x^3-x^2-x-1)$).

b) ~~ZAE~~

Exo4 : On a $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= (x-j)(x-\bar{j})$ avec $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{+i\frac{2\pi}{3}}$

Pour montrer que $1+x+x^2$ est un diviseur de $x^{360}+x^{416}+x^{289} = A$

il suffit que montrer que A est divisible par $(x-j)$ et par $(x-\bar{j})$

ou montrer que j est racine de A.

Calculons $A(j) = x^{289}\left(1+x^{71}+x^{127}\right)\Big|_j$

$= j^{289}\left(1+e^{\frac{i142\pi}{3}}+e^{\frac{i254\pi}{3}}\right) = j^{289}\left(1+e^{-\frac{i2\pi}{3}}+e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)$

$= \left(1+\cos\frac{2\pi}{3} - i\cancel{\sin\frac{2\pi}{3}} + \cos\frac{2\pi}{3} + i\cancel{\sin\frac{2\pi}{3}}\right) j^{289}$

$= 0$ car $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Exo 5 : Cherchez le degré de

$P_n = (x^2+1)^n - 2x^{2n} + (x^2-1)^n \quad , n \geq 0.$

$$P_n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{2p} + \sum_{p=0}^{n} C_n^p (x)^{2p} (-1)^{n-p} - 2x^{2n}.$$

2 cas sont possibles :

1°/ n pair le degré de P_n est

$\cancel{P_n = x^{2n} + x^{2n} - 2x^{2n} + C_n^{n-1} x^{2(n-1)}}$.

$$P_n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{2p} \left(1 + (-1)^{n-p}\right) - 2x^{2n}.$$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{2p} \left(1 + (-1)^p\right) - 2x^{2n}.$$

$$= x^{2n}\left(1 + (-1)^n\right) + C_n^{n-1} x^{2(n-1)} \left(1 + (-1)^{n-1}\right) + \dots + 1 - 2x^{2n}.$$

$$\Rightarrow d^\circ P_n = 2n - 4$$

2/ n impair

$$P_n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{2p} \left(1 - (-1)^p\right) - 2x^{2n}.$$

$$= x^{2n}\left(1 - (-1)^n\right) + C_n^{n-1} x^{2(n-1)} \left(1 - (-1)^{n-1}\right) + \dots + 1 - 2x^{2n}$$

$$d^\circ P_n = 2(n-2) = 2n - 4.$$

5/5

Tami Omar